تمرین درس ریاضی عمومی I   نیمسال اول ۸۱–۸۰   گروه‌های (۹–۱۶)   مدرس: دکتر نجفی

۱) برای بردارهای u, v, w در فضای $\mathbb{R}^۳$، اتحاد ژاکوبی را ثابت کنید:

$$u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = ۰$$

۲) وضعیت نسبی (تقاطع، تنافر، توازی یا انطباق) زوج‌های زیر از خطوط راست را تعیین کنید:

الف) در $\mathbb{R}^۳$: $\frac{x-۱}{۴} = \frac{y-۲}{۱} = \frac{z}{۳}$ و $\frac{x-۵}{۲} = \frac{y-۳}{۲} = \frac{z-۲}{۱}$.

ب) در $\mathbb{R}^۴$: $\frac{x_۱-۲}{۶} = \frac{x_۲-۳}{۴} = \frac{x_۳+۱}{۲} = \frac{x_۴}{-۲}$ و $\frac{x_۱-۵}{۳} = \frac{x_۲-۵}{۲} = \frac{x_۳}{۱} = \frac{x_۴+۱}{-۱}$.

ج) در $\mathbb{R}^۴$: $\frac{x_۱}{-۲} = \frac{x_۲+۱}{۰} = \frac{x_۳-۱}{۱} = \frac{x_۴}{-۲}$ و $\frac{x_۱+۲}{۶} = \frac{x_۲-۱}{۱} = \frac{x_۳-۱}{-۱} = \frac{x_۴-۲}{۲}$.

۳) دو خط راست زیر را در $\mathbb{R}^۳$ در نظر بگیرید:

$$\frac{x_۱ - ۱}{۲} = \frac{x_۲}{۳} = \frac{x_۳ + ۱}{-۱} \quad , \quad \frac{x_۱ + ۱}{A} = \frac{x_۲ + ۲}{B} = \frac{x_۳}{C}$$

الف) آیا می‌توان (A, B, C) را طوری تعیین کرد که دو خط فوق منطبق باشند؟

ب) برای چه انتخاب‌هایی از (A, B, C) دو خط فوق متقاطعند؟ نشان دهید مجموعهٔ این انتخاب‌ها یک صفحه در فضای سه بعدی (A, B, C) تشکیل می‌دهد.

ج) نشان دهید مجموعهٔ انتخاب‌های (A, B, C) که به‌ازای آن دو خط فوق موازی‌اند یک خط راست در فضای سه بعدی (A, B, C) تشکیل می‌دهد که با صفحه قسمت (ب) موازی است.

۴) دو خط زیر را در $\mathbb{R}^۳$ در نظر بگیرید:

$$\frac{x_۱}{۳} = \frac{x_۲ - ۱}{۱} = \frac{x_۳}{-۱} \quad , \quad \frac{x_۱ - a}{۰} = \frac{x_۲ - b}{۲} = \frac{x_۳ - c}{۱}$$

نشان دهید مجموعه مقادیر (a, b, c) که به‌ازای آن دو خط نقطهٔ مشترک دارند یک صفحه در فضای سه بعدی (a, b, c) تشکیل می‌دهد.

اگر E یک خط، صفحه یا زیرفضای مستوی در $\mathbb{R}^n$ باشد، انتقال‌یافتهٔ آن به $\underline{\circ}$ را به E° نمایش می‌دهیم. $E_۱$ و $E_۲$ را موازی می‌نامیم اگر اشتراک آنها تهی باشد ولی برای $E_۱^\circ$ و $E_۲^\circ$ داشته باشیم $E_۱^\circ \subset E_۲^\circ$ یا $E_۲^\circ \subset E_۱^\circ$ (بالاخص اگر $E_۱^\circ = E_۲^\circ$). در تمرین‌های بعد این تعریف توازی منظور شده است.

۵) در فضای سه بعدی، دو صفحهٔ متمایز، نسبت به یکدیگر، فقط یکی از دو حالت موازی یا متقاطع را می‌توانند داشته باشند، و در حالت متقاطع، فصل مشترک آنها یک خط راست است. برای دو صفحه در $\mathbb{R}^n$، $n > ۳$، روابط ممکن بین دو صفحه متنوع‌تر است. در زیر موارد گوناگون رابطهٔ دو صفحه در $\mathbb{R}^۴$ آمده است. در هر مورد درباره وضعیت صفحهٔ داده شده با صفحهٔ

$$E = \{s(۱, ۰, ۰, ۰) + t(۰, ۱, ۰, ۰) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

ادعای ذکر شده را ثابت کنید:

الف) E با صفحهٔ $\{s(۰, ۰, ۱, ۰) + t(۰, ۰, ۰, ۱) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ فقط یک نقطهٔ مشترک دارد.

ب) اشتراک E با صفحه $\{s(۰, ۱, ۰, ۰) + t(۰, ۰, ۱, ۰) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ یک خط راست است.

ج) E با صفحهٔ $\{(۱, ۱, ۱, ۱) + s(۵, ۳, ۰, ۰) + t(-۱, ۲, ۰, ۰) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ موازی است.

د) E با صفحهٔ $\{(۰, ۰, ۱, ۱) + s(۱, ۰, ۰, ۰) + t(۰, ۰, ۰, ۱) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ متنافر است، یعنی دو صفحه نه موازی هستند و نه نقطهٔ مشترک دارند.

۶) نشان دهید هر صفحه در $\mathbb{R}^n$، $n \geq ۳$، اجتماع یک دسته خطوط راست موازی است.

۷) نشان دهید اشتراک دو صفحه در $\mathbb{R}^n$، $n \geq ۴$، اگر تهی نباشد، یک نقطه یا یک خط راست است.

۸) فرض کنید $\pi_۱$ و $\pi_۲$ دو صفحه در $\mathbb{R}^۴$ باشند که اشتراک آنها یک تک نقطه است. نشان دهید هر صفحهٔ موازی با $\pi_۱$ نیز با $\pi_۲$ دقیقاً یک نقطه مشترک دارد.

۹) فرض کنید $\pi_۱$ و $\pi_۲$ دو صفحه در $\mathbb{R}^۴$ باشند که اشتراک آنها یک خط راست است. نشان دهید اشتراک هر صفحهٔ موازی با $\pi_۱$، با $\pi_۲$ یا یک خط راست یا تهی است.

۱۰) فرض کنید π_1 و π_2 دو صفحه در $\mathbb{R}^4$ باشند که اشتراک آنها یک تک نقطه است. نشان دهید هیچ خط راست در π_1 با هیچ خط راست در π_2 موازی نیست.

۱۱) اگر π_1 و π_2 دو صفحهٔ متنافر در $\mathbb{R}^4$ باشند، نشان دهید خط راستی ℓ_1 در π_1 وجود دارد و خط راستی ℓ_2 در π_2 که ℓ_1 و ℓ_2 موازی هستند. اگر به جای $\mathbb{R}^4$، $\mathbb{R}^5$ را در نظر بگیریم، آیا این حکم همچنان صادق می‌ماند؟

۱۲) تمرینات منتخب از فصل دهم کتاب آدامز:

- بخش ۱۰.۲ شماره‌های ۵، ۷، ۸، ۱۰، ۱۱، ۱۵، ۱۹، ۲۵، ۲۹، ۳۲، ۳۳.
- بخش ۱۰.۳ شماره‌های ۴، ۱۲، ۱۷، ۱۹، ۲۰، ۲۲، ۲۷، ۲۸.
- بخش ۱۰.۴ شماره‌های ۷، ۸، ۱۰، ۱۴، ۱۷، ۱۹، ۲۵، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰.
- بخش ۱۰.۵ شماره‌های ۱۹، ۲۰، ۲۳، ۲۴.
- بخش ۱۰.۶ شماره‌های ۹، ۱۲، ۱۴، ۱۹، ۲۰.