مسابقهٔ ریاضی دانشجویی شریف

روز اول — ۸۱/۱۲/۷

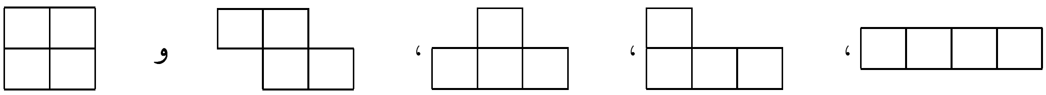
وقت ۴ ساعت (پس از ۲۰ دقیقه از شروعِ امتحان به هیچ سوالی جواب داده نمی‌شود.)

---

۱) فرض کنید f تابعی دوبار مشتق‌پذیر با مقادیر حقیقی روی $\mathbb{R}$ باشد، به طوری که $f(0) = 0$، $f'(0) > 0$ و به ازای هر $x \geq 0$ داریم $f''(x) \geq f(x)$. ثابت کنید: به ازای هر $x > 0$ داریم: $f(x) > 0$.

۲) S را زیرمجموعه‌ای ناشمارا از $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. ثابت کنید $t \in \mathbb{R}$ موجود است که هر دو مجموعه $S \cap (-\infty, t)$ و $S \cap (t, +\infty)$ ناشمارا باشند. تعداد tها چقدر می‌تواند باشد؟

۳) آیا با کنار هم قرار دادن اشکال زیر و استفاده از هر کدام دقیقاً یک‌بار، می‌توان یک مستطیل ساخت به طوری که شکلها روی هم قرار نگیرند؟



۴) $A \in M_n(\mathbb{C})$ ماتریسی دلخواه است یعنی A یک ماتریس $n \times n$ است که درایه‌های آن از اعداد مختلط هستند و L نگاشتی است که به صورت زیر بر $M_n(\mathbb{C})$ تعریف شده است:

$$L : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$$
$$L(X) = AX + XA$$

نشان دهید A پوچ‌توان است اگر و فقط اگر L پوچ‌توان باشد.

۵) R یک حلقه و $a \in R$ عضوی از حلقه است به طوری که به‌ازای هر $x \in R$ ($x \neq 0$) داریم: $x^3 = a$.

ثابت کنید R یا یک حلقه پوچ است و یا یک میدان است. (حلقه R را پوچ نامیم اگر به‌ازای هر $r \in R$ وجود داشته باشد $n \in \mathbb{N}$ که $r^n = 0$).

۶) پس از شکست در همهٔ مسابقات، جن‌های کودن تصمیم گرفتند به ورزش بپردازند و در باشگاههای ورزشی ثبت نام کردند. در هر باشگاه تنها تعداد متناهی از جن‌ها پذیرفته می‌شدند. اما در هر مجموعهٔ نامتناهی از جن‌ها، حداقل دو جن وجود داشت که در یک باشگاه ثبت‌نام کرده بودند. ثابت کنید به استثنای تعداد متناهی جن تنبل، بقیه در تعداد نامتناهی باشگاه نام‌نویسی کرده‌اند. (در ضمن هر کدام از جن‌ها می‌توانستند در هر تعداد باشگاه ثبت نام کنند)

مسابقهٔ ریاضی دانشجویی شریف

روز دوم — ۸۱/۱۲/۸

وقت ۴ ساعت (پس از ۲۰ دقیقه از شروع امتحان به هیچ سوالی جواب داده نمی‌شود.)

---

۷) حاصل سری زیر را حساب کنید:

$$\sum_{z=1}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{2^x(2^{x+y}+2^{x+z}+2^{y+z})}=?$$

۸) آیا تابع مشتق‌پذیر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ وجود دارد که در همه شرط‌های زیر صدق کند:

1) $\forall x\in\mathbb{R}:\quad f(x)\geq 0$

2) $\forall x\in\mathbb{Q}:\quad f(x)>0$

۳) معادله $f(x)=0$ ناشمارا جواب داشته باشد.

۹) فرض کنید $a>0$ عددی حقیقی باشد. مجموعهٔ همه دنباله‌های $\{\epsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ را در نظر بگیرید که

1) $\forall n\in\mathbb{N},\ \epsilon_n=0$ یا ۱

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\epsilon_n}{n}=a$

کاردینال این مجموعه چقدر است؟

۱۰) A و B دو ماتریس مختلط $n\times n$ هستند به طوری که

$$2A(B-A)=A+B.$$

ثابت کنید A و B با هم جابه‌جا می‌شوند.

۱۱) معادلهٔ سیاله $y^2=x^3-p^3$ را با شرطهای p عدد اول و $p\nmid y$ و $3\nmid y$ حل کنید.

۱۲) G گروهی متناهی است که بر مجموعهٔ n $(n\geq 2)$ عضوی A عمل می‌کند، به‌طوری که به ازای هر $(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in A^2$ که $a_1\neq a_2$ و $b_1\neq b_2$ عضو $g\in G$ وجود دارد که به ازای $i=1,2$، $ga_i=b_i$. ثابت کنید: $n(n-1)\mid |G|$.