



مسابقه ریاضی دانشجویی
دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی
موضوع امتحان: جبر خطی

مدت امتحان : ۲ ساعت

تاریخ: ۸۳/۱۱/۲۸

بارم هر سؤال ۱۰ نمره است.

سؤال ۱) فرض کنید $\{V_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از زیرفضاهای k -بعدی متمایز فضای برداری V باشند، با این ویژگی که اشتراک هر دوتایی از آنها زیرفضایی $(k-1)$ -بعدی است. ثابت کنید یا تمام این فضاها شامل یک زیرفضای $(k-1)$ -بعدی هستند یا اینکه همگی در یک زیرفضای $(k+1)$ -بعدی قرار دارند.

سؤال ۲) فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ وارونپذیر روی میدان اعداد حقیقی باشد. ثابت کنید

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|_{\infty}} = \min\{\|A - B\|_{\infty} : B \text{ وارونپذیر نیست}\}$$

$$\|A\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n - \{0\}} \frac{\|Ax\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} \text{ و } \|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

سؤال ۳) فرض کنید A و B دو ماتریس $n \times n$ روی میدان اعداد مختلط \mathbb{C} باشند با این ویژگی که $A^2 = B^2 = I$. ثابت کنید یک زیرفضای 1 یا 2 بعدی مانند W در \mathbb{C}^n موجود است که تحت هر دو ماتریس A و B پایا می‌باشد، یعنی $AW \subseteq W$ و $BW \subseteq W$.