



مسابقه ریاضی دانشجویی
دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی
موضوع امتحان: جبر

مدت امتحان : ۲ ساعت

تاریخ: ۸۳/۱۱/۲۸

بارم هر سؤال ۱۰ نمره است.

سؤال (۱) فرض کنید $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ دو جایگشت مزدوج در S_n باشند با این ویژگی که هر یک از آنها حداقل دو عضو را ثابت نگه می‌دارد. نشان دهید $\gamma \in A_n$ وجود دارد که $\sigma_1 \gamma = \sigma_2 \gamma^{-1}$.

سؤال (۲) فرض کنید R یک حلقهٔ جابه‌جایی و یک‌دار باشد. ایده‌آل I از R را تحویل‌ناپذیر می‌نامیم در صورتی که اگر J_1 و J_2 دو ایده‌آل از R باشند با این ویژگی که $I = J_1 \cap J_2$ آنگاه $I = J_1$ یا $I = J_2$. فرض کنید I یک ایده‌آل تحویل‌ناپذیر از R باشد و $r \in R$ طوری باشد که $(I : r) \neq I$. همچنین فرض کنید مجموعهٔ $\{(I : r^n)\}_{n=1}^{\infty}$ متناهی باشد. ثابت کنید $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $(I : r^n) = R$. (اگر J ایده‌آل R باشد و $s \in R$ آنگاه بنا بر تعریف $(J : s) = \{t \in R : st \in J\}$).

سؤال (۳) فرض کنید G زیرگروهی از S_n و از مرتبه p^k باشد که در آن p یک عدد اول است با این ویژگی که $n < p^2$. ثابت کنید $G \cong \mathbb{Z}_p \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_p$.