پاسخ سوالات جلسه اول ۸۳/۲/۲۲

پاسخ سوال ۱) فرض کنید $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. اگر تعداد متناهی جملات سری ناصفر باشد، یعنی f یک چند جمله‌ای باشد، آنگاه چون یک‌به‌یک است، بنا به قضیه اساسی جبر $f(z)=c_0+c_1 z$. در غیر اینصورت $f(\frac{1}{z})$ در صفر دارای نقطه تکین اساسی است. بنابراین در هر همسایگی صفر تابع $f(\frac{1}{z})$ یک‌به‌یک نیست و لذا f نیز یک‌به‌یک نمی‌باشد، که با فرض در تناقض است. $\square$

پاسخ سوال ۲) چون f پوشاست، $f^{-1}\{(0,0)\}$ حداقل یک عضو دارد. اگر حکم برقرار نباشد، دو حالت داریم:

الف) $f^{-1}\{(0,0)\}=\{\alpha_1\}$. در اینحالت $f:(\mathbb{R}',d_1)\to(A_1,d)$ پیوسته و پوشا می‌باشد که در آن $A_1=A-\{(0,0)\}$ و $\mathbb{R}'=\mathbb{R}-\{\alpha_1\}$. چون

$$A_1=\{(x,0)|x>0\}\cup\{(x,0)|x<0\}\cup\{(0,y)|y>0\}\cup\{(0,y)|y<0\}$$

اتحاد چهار مجموعه باز از هم جداست، $\mathbb{R}'$ باید اتحاد چهار مجموعهٔ باز از هم جدا باشد که این تناقض است.

ب) اگر $f^{-1}\{(0,0)\}=\{\alpha_1,\alpha_2\}$. در اینحالت $f:(\mathbb{R}'',d_1)\to(A_1,d)$ پیوسته و پوشا می‌باشد که در آن A_1 مانند قسمت قبل می‌باشد و $\mathbb{R}''=\mathbb{R}-\{\alpha_1,\alpha_2\}$. چون مانند قسمت قبل A_1 اتحاد چهار مجموعهٔ باز از هم جداست، $\mathbb{R}''$ باید اتحاد چهار مجموعهٔ باز از هم جدا باشد که تناقض است. بنابراین $f^{-1}\{(0,0)\}$ حداقل سه عضو دارد. $\square$

پاسخ سوال ۳) با توجه به فرض و با استفاده از فرمول عکس موبیوس، برای هر عدد طبیعی n می‌توانیم بنویسیم

$$f(n)=\sum_{d|n}\mu(d)(\frac{n}{d})^2=n^2\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d^2}=n^2 g(n),$$

که در آن $g(n)=\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d^2}$. چون $\frac{\mu(d)}{d^2}$ تابعی ضربی از d می‌باشد لذا g نیز تابعی ضربی از n خواهد بود. چون برای عدد اول p و عدد صحیح و نامنفی α،

$$g(p^\alpha)=\sum_{d|p^\alpha}\frac{\mu(d)}{d^2}=\frac{\mu(1)}{1}+\frac{\mu(p)}{p^2}=1-\frac{1}{p^2},$$

لذا برای هر $n>1$،

$$g(n)=g\left(\prod_{\text{اول}\,p|n}p^{\alpha_p}\right)=\prod_{\text{اول}\,p|n}g(p^{\alpha_p})=\prod_{\text{اول}\,p|n}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)=\prod_{\text{اول}\,p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)\prod_{\text{اول}\,p|n}\left(1+\frac{1}{p}\right)$$

$$=\frac{\phi(n)}{n}\prod_{\text{اول}\,p|n}\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

پاسخ سوالات جلسه دوم ۸۳/۲/۲۳

پاسخ سوال ۱) فرض کنید $g(y) = f^{-1}(y) = x$ و $P(x,y) = P(x, 2x^2)$ روی $y = 2x^2$ اختیار شده باشد. در اینصورت

$$A = \int_0^x (2t^2 - t^2)dt = \tfrac{1}{3}x^3$$

$$B = \int_0^y \left(\sqrt{\tfrac{t}{2}} - g(t)\right)dt = \tfrac{\sqrt{2}}{3} y^{\frac{3}{2}} - \int_0^y g(t)dt$$

$$A = B \Rightarrow \int_0^y g(t)dt = (\tfrac{y}{2})^{\frac{3}{2}}$$

بنا به قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال و با توجه به شکل می‌توان نسبت به y از رابطهٔ فوق مشتق گرفت (g پیوسته است). پس

$$g(y) = \frac{3}{4}(\frac{y}{2})^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x^2 = \frac{9}{32}y \Rightarrow y = \frac{32}{9}x^2$$

$\square$

پاسخ سوال ۲) فرض کنید $h(x) = f(x) - x$. در اینصورت $h(a) > 0$ و $h(b) < 0$. چون h پیوسته است، $\delta > 0$ موجود است که برای هر $x \in (0, \delta)$، $h(x+a) > 0$ و $h(b-x) < 0$. فرض کنید $\alpha = \frac{\delta}{n+1}$ و

$$g(x) = [f(x) + f(x+\alpha) + \cdots + f(x+n\alpha)] - [x + (x+\alpha) + \cdots + (x+n\alpha)].$$

در اینصورت $g(a) > 0$ و $g(b) < 0$ و بنا به قضیه مقادیر میانی یک $c \in (a,b)$ موجود است که $g(c) = 0$. پس

$$\begin{aligned}
f(c) + f(c+\alpha) + \cdots + f(c+n\alpha) &= c + (c+\alpha) + \cdots + (c+n\alpha)\\
&= nc + (1 + 2 + \cdots + n)\alpha\\
&= (n+1)c + \frac{(n+1)n}{2}\alpha\\
&= (n+1)(c + \tfrac{n}{2}\alpha)
\end{aligned}$$

$\square$

پاسخ سوال ۳) بله.

توجه می‌کنیم که $\det(A+B) = \det(A^t + B^t)$. پس

$$\begin{aligned}
&\det(A)\det(A+B) = \det(A)\det(A^t+B^t) = \det(I + AB^t),\\
&\det(B)\det(A+B) = \det(B)\det(A^t+B^t) = \det(I + BA^t) = \det(I + AB^t).
\end{aligned}$$

در نتیجه $\det(A)\det(A+B) = \det(B)\det(A+B)$ و لذا $(\det(A) - \det(B))\det(A+B) = 0$.

اگر $\det(A) - \det(B) = 0$، فرض نتیجه خواهد داد که $\det(A) = \det(B) = 0$ و این تناقض است زیرا در ماتریسهای متعامد دترمینان ± 1 است. پس $\det(A+B) = 0$. $\square$

پاسخ سوال ۴) فرض کنید $x, y \in R$ دلخواه باشند. می‌توانیم بنویسیم

$$x^{n+۲}y^{n+۲} = (xy)^{n+۲} = (xy)^{n+۱}xy = x^{n+۱}y^{n+۱}xy,$$

در نتیجه

$$x^{n+۱}(xy^{n+۱} - y^{n+۱}x)y = ۰.$$

تساوی اخیر به ازای هر $x, y \in R$ برقرار است، پس با تبدیل x به $x + ۱$ نیز برقرار خواهد ماند. در این صورت به دست می‌آوریم

$$(۱ + x)^{n+۱}(xy^{n+۱} - y^{n+۱}x)y = ۰,$$

یا

$$\left(\binom{n+۱}{۰} + \binom{n+۱}{۱}x + \cdots + \binom{n+۱}{n+۱}x^{n+۱}\right)(xy^{n+۱} - y^{n+۱}x)y = ۰.$$

با ضرب طرفین تساوی اخیر در x^n به دست می‌آوریم

$$x^n(xy^{n+۱} - y^{n+۱}x)y = ۰.$$

تساوی اخیر نیز به ازای هر $x, y \in R$ برقرار است، پس مجدداً با تبدیل x به $x + ۱$ برقرار خواهد ماند. در این صورت اگر مانند بالا عمل کنیم به دست می‌آوریم

$$x^{n-۱}(xy^{n+۱} - y^{n+۱}x)y = ۰.$$

با ادامهٔ این فرآیند به دست می‌آید

$$(xy^{n+۱} - y^{n+۱}x)y = ۰. \qquad (*)$$

اکنون با شروع از

$$x^{n+۱}y^{n+۱} = (xy)^{n+۱} = (xy)^n xy = x^n y^n xy$$

به دست می‌آوریم

$$(xy^n - y^n x)y = ۰.$$

با ضرب طرفین تساوی بالا در y به دست می‌آوریم $yxy^{n+۱} - y^{n+۱}xy = ۰$ که با استفاده از $(*)$ به صورت $yxy^{n+۱} - xy^{n+۲} = ۰$ یا $(yx - xy)y^{n+۱} = ۰$ تبدیل می‌شود. در نهایت با تبدیل y به $y + ۱$ و انجام فرآیند بالا به دست می‌آید $yx - xy = ۰$، یا $yx = xy$. پس R جابه‌جایی است. $\square$

پاسخ سوال ۵) فرض کنید یک نفر را به تصادف انتخاب کرده‌ایم. پیشامدهای ذیل را تعریف می‌کنیم:

پیشامدA := شخص قاتل است $\Rightarrow P(A) = \frac{۱}{۳}$

پیشامدB := شخص بی‌گناه است $\Rightarrow P(B) = \frac{۲}{۳}$

پیشامد$+$:= شخص نسبت به سوال واکنش مثبت نشان دهد $\Rightarrow \begin{cases} P(+|A) = ۰/۸ \\ P(+|B) = ۰/۴ \end{cases}$

پیشامد$-$:= شخص نسبت به سوال واکنش منفی نشان دهد $\Rightarrow \begin{cases} P(-|A) = ۰/۲ \\ P(-|B) = ۰/٦ \end{cases}$

پیشامدE := شخص در برابر ۴ سوال واکنش مثبت
و یک سوال واکنش منفی نشان دهد

واضح است که جواب مسئله $P(A|E)$ است.

$$\begin{aligned} P(A|E) &= \frac{P(A\cap E)}{P(E)} = \frac{P(A)P(E|A)}{P(A)P(E|A)+P(B)P(E|B)} \\ &= \frac{\frac{۱}{۳}.\binom{۵}{۴}(۰/۸)^{۴}(۰/۲)}{\left(\frac{۱}{۳}.\binom{۵}{۴}(۰/۸)^{۴}(۰/۲)\right)+\left(\frac{۲}{۳}.\binom{۵}{۴}(۰/۴)^{۴}(۰/٦)\right)} = \frac{۸}{۱۱}. \ \square \end{aligned}$$

پاسخ سوال ٦) برای $j = ۱,\ldots,k$، j مجموعه $A_۱$، ...، A_j را از F طوری انتخاب می‌کنیم که در شرط زیر صدق کنند

$$۱ \le |A_۱\cap\cdots\cap A_j| \le r-(j-۱)(I(F)-۱) \qquad (*)$$

و برای $j=k$ حکم مسئله اثبات می‌شود.

با استقراء روی j رابطهٔ $(*)$ را ثابت می‌کنیم. اگر $j = ۱$ آنگاه یک عضو F مانند $A_۱$ را به دلخواه انتخاب نمایید. فرض کنید $(*)$ برای $j(j\le k-۱)$ اثبات شده باشد و $A_۱$، ...، A_j مجموعه‌های از F باشند که در رابطهٔ $(*)$ صدق می‌کنند. طبق فرض مسئله $A_۱\cap\cdots\cap A_j$ با هر عضو F اشتراک ناتهی دارد بنابراین $|A_۱\cap\cdots\cap A_j| \ge I(F)$. یک زیرمجموعه مانند $S\subseteq A_۱\cap\cdots\cap A_j$ با $I(F)-۱$ عضو در نظر بگیرید. لذا $A_{j+۱}\in F$ وجود دارد که $S\cap A_{j+۱}=\phi$ بنابراین

$$\begin{aligned} ۱ &\le |A_۱\cap\cdots\cap A_j\cap A_{j+۱}| \le |A_۱\cap\cdots\cap A_j\cap \overline{S}| = |A_۱\cap\cdots\cap A_j - S| \\ &= |A_۱\cap\cdots\cap A_j| - (I(F)-۱) \le r-(j-۱)(I(F)-۱)-(I(F)-۱) \le \\ &\le r-j(I(F)-۱) \end{aligned}$$

لذا رابطهٔ $(*)$ و حکم مسئله نتیجه می‌شوند. $\square$

در نتیجه برای هر $n > ۱$،

$$\frac{f(n)}{\phi(n)} = \frac{n^۲ g(n)}{\phi(n)} = \frac{n^۲}{\phi(n)}\,\frac{\phi(n)}{n} \prod_{p|n \text{ اول}} \left(۱ + \frac{۱}{p}\right) = n \prod_{p|n \text{ اول}} \left(۱ + \frac{۱}{p}\right). \ \square$$

پاسخ سوال ۴) $۱ \leq k \leq n$ را دلخواه (ولی ثابت) در نظر بگیرید و قرار دهید $\tau \in G_k \cap Z(G)$. حال فرض کنید $۱ \leq i \leq n$ دلخواه باشد. بنابر فرض $\sigma \in G$ موجود است که $\sigma(k) = i$. اکنون می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} \lambda \in G_i &\iff \lambda(i) = i \\ &\iff \lambda(\sigma(k)) = \sigma(k) \\ &\iff \sigma^{-۱}\lambda\sigma(k) = k \\ &\iff \sigma^{-۱}\lambda\sigma \in G_k \\ &\iff \lambda \in \sigma G_k \sigma^{-۱} \end{aligned}$$

پس $G_i = \sigma G_k \sigma^{-۱}$. چون $\tau \in G_k$، پس $\sigma\tau\sigma^{-۱} \in \sigma G_k \sigma^{-۱} = G_i$ و چون $\tau \in Z(G)$، لذا $\tau \in G_i$. اما i دلخواه فرض شده بود، پس $\tau \in \bigcap_{i=۱}^{n} G_i = \{e\}$. در نتیجه $G_k \cap Z(G) = \{e\}$. $\square$

پاسخ سوال ۵) فرض کنید $v_۱, v_۲, \ldots, v_t \in A$ و دو به دو تعداد زوج درایهٔ مشترک یک دارند. حال ادعا می‌کنیم v_iها $(۱ \leq i \leq t)$ روی میدان $\mathbb{Z}_۲$ مستقل خطی هستند زیرا:

$$c_۱v_۱ + \cdots + c_tv_t = ۰ \overset{\forall i}{\Longrightarrow} v_i.(c_۱v_۱ + \cdots + c_tv_t) = ۰ \pmod{\mathbb{Z}_۲}$$

اما واضح است که

$$v_i.v_j = \begin{cases} ۰ & i \neq j \\ ۱ & i = j \end{cases} \pmod{\mathbb{Z}_۲}$$

لذا

$$v_i.(c_۱v_۱ + \cdots + c_tv_t) = ۰ \Longrightarrow c_i = ۰$$

بنابراین v_iها مستقل خطی هستند. پس $t \leq n$. از طرفی اگر v_i را برداری در نظر بگیریم که درایهٔ iام آن یک و بقیه درایه‌ها صفر باشد $(۱ \leq i \leq n)$. آنگاه واضح است که $v_i \in A$ و v_iها دو به دو تعداد زوج درایه مشترک یک دارند. $\square$

پاسخ سوال ٦) یک جایگشت از عضوهای P به صورت تصادفی در نظر بگیرید و قرار دهید:

F_i پیشامد این باشد که i قبل از عناصر $P \backslash U_i$ در جایگشت ظاهر شود.

E_i پیشامد این باشد که F_i به وقوع پیوندد و برای هر $j \in L_i$، F_j رخ ندهد.

به عبارت دیگر E_i پیشامد این است که i کوچکترین عضو P است که F_i رخ می‌دهد. زیرا اگر i و j دو عضو غیرقابل مقایسه باشند آنگاه F_i و F_j هر دو نمی‌توانند با هم به وقوع پیوندند. اگر i و j قابل مقایسه باشند آنگاه دو پیشامد E_i و E_j نیز نمی‌توانند با هم رخ دهند (لذا پیشامدهای E_iها

مجزا هستند). حال با استقراء ثابت می‌کنیم $X_i = P_r(E_i)$. اگر i عضو مینیمال P باشد حکم واضح است. فرض کنید برای $j \in L_i$ داریم $X_j = P_r(E_j)$ و ثابت می‌کنیم $X_i = P_r(E_i)$. از آنجایی که E_jها مجزا هستند داریم احتمال اینکه F_jها برای $j \in L_i$ رخ ندهند برابر است با $\sum_{j \in L_i} X_j - ۱$. اگر ثابت کنیم پیشامد F_i مستقل است از پیشامد «تمام F_jها رخ ندهند» $(j \in L_i)$، آنگاه به‌راحتی می‌توانیم حکم را نتیجه بگیریم. با توجه به اینکه مکان i در جایگشت تاثیری در F_jها $(j \in L_i)$ ندارد لذا واضح است که آنها مستقل هستند بنابراین:

$$P_r(E_i) = P_r(F_i \cap \bigcap_{j \in L_i} \overline{F_j}) = P_r(F_i) P_r(\bigcap_{j \in L_i} \overline{F_j}) = \frac{۱ - \sum_{j \in L_i} X_j}{n - |U_i|}$$

پس برای هر $i \in P$، $X_i = P_r(E_i)$ لذا $۰ \le X_i \le ۱$. $\square$