دانشکده علوم ریاضی

تمرین سری ۶ آبان ۹۸

بهینه‌سازی هندسی گسسته

(مباحثی در نظریه محاسبه، ۸۳۸-۲۲)

۱. گراف ساده و همبند G را با وزن‌های یالی $\varphi(xy)$ و وزن راسی $deg(x) = \sum_{y\sim x}\varphi(xy)$ در نظر بگیرید. هم‌چنین زیرمجموعه $F \subseteq V$ و مرز آن $\delta(F) = H_۱ \cup H_۲$ که در آن $H_۱ \cap H_۲ = \emptyset$ است را در نظر بگیرید و توابع زیر را مفروض دارید:

$$q \in \mathcal{F}^+(F),\ h \in \mathcal{F}^+(H_۱),\ g_۱ \in \mathcal{F}(H_۱),\ g_۲ \in \mathcal{F}(H_۲).$$

حل معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} (\Delta u)_{(x)} + q(x)u(x) = f(x) & \forall x \in F \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) + h(x)u(x) = g_۱(x) & \forall x \in H_۱ \\ u(x) = g_۲(x) & \forall x \in H_۲ \end{cases}$$

که در آن،

$$(\Delta u)_{(x)} := \sum_{y\sim x}(u(x)-u(y))\varphi(xy) \quad \forall x \in F.$$

و بردار نرمال در مرز،

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) := \sum_{y\sim x, y\in F}(u(x)-u(y))\varphi(xy) \quad \forall x \in \delta(F).$$

و هم‌چنین،

$$\bar{F} := F \cup \delta(F),\ \ \dot{F} := \{x \in F | \forall y \sim x \ \ y \in F\}.$$

در این وضع نام‌گذاری زیر را داریم:

F= V	Poisson Problem
$H_1 = \emptyset$	Dirichlet Problem
$H_2 = \emptyset$	Robin Problem
$H_2 = \emptyset$ & $h \equiv 0$	Neumann Problem
$h \equiv 0$	Mixed Problem

در این وضعیت $S_q(u)_{(x)} = (\Delta u)_{(x)} + q(x)u(x)$ را عمل‌گر شرودینگر می‌نامند.

الف) اگر $u, v \in \mathcal{F}(F)$ ثابت کنید،

- اتحاد اول گرین

$$\langle \nabla u, \nabla v\rangle_{\varphi}|_{\bar{F}} = \langle \Delta u, v\rangle|_F + \langle \frac{\partial u}{\partial n}, v\rangle|_{\delta(F)}$$

- اتحاد دوم گرین

$$\langle \Delta u, v\rangle|_F - \langle u, \Delta v\rangle|_F = \langle \frac{\partial v}{\partial n}, u\rangle|_{\delta(F)} - \langle \frac{\partial u}{\partial n}, v\rangle|_{\delta(F)}$$

ب) مسئله اندازه تعادل را به صورت زیر در نظر بگیرید.
"اندازه مثبت ν را روی F بیابید چنان‌که $(S_q\nu)_{(x)} = ۱ \quad \forall x \in F$ "
نشان دهید مگر درحالتی‌که هم‌زمان $q \equiv ۰$ و $F = V$، مسئله اندازه تعادل جواب یکتای ν^F دارد و به‌علاوه $\text{Support}(\nu^F) = F$.
اگر انرژی $\mathcal{E}(\mu)$ را به صورت $\mathcal{E}(\mu) := \langle S_q(\mu), \mu\rangle$ تعریف کنیم و بدانیم که اندازه μ^F جواب مسئله بهینه‌سازی زیر است،

$$\min a \;\; s.t. \;\; ۰ \leq \mu \leq \chi_F, \; ||\mu||_۱ = ۱, \; S_q(\mu) \leq a\chi_F$$

در این‌صورت $\nu^F = \frac{\mu^F}{\mathcal{E}(\mu^F)}$

ج) نشان دهید،

$$H \subset F \Rightarrow \nu^H \leq \nu^F.$$

د) معادله دیریشله زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} \Delta u = h & \text{on } F \\ u = ۰ & \text{on } F^c \end{cases}$$

یک تابع گرین برای معادله فوق تابعی مثل

$$\begin{aligned} G :& V \times F \to \mathbb{R} \\ & (x,y) \mapsto G(x,y) := G_y(x) \end{aligned}$$

است که جواب معادله دیریشله زیر باشد.

$$\begin{cases} \Delta u = \delta_y & \text{on} \quad F \\ u = 0 & \text{on} \quad F^c \end{cases}$$

که در آن

$$\delta_y(x) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

نشان دهید که جواب معادله اول به صورت $u(x) = \sum_{y \in F} G_y(x) h(y)$ است. هم‌چنین نشان دهید تابع گرین به صورت $G_y(x) = \frac{\nu^F(y)}{||\nu^F|| - ||\nu_y^F||}(\nu^F(x) - \nu_y^F(x))$ است که در آن ν_y^F اندازه تعادل مجموعه $F - \{y\}$ است.

ه) معادله پواسون $\Delta u = h$ را روی V در نظر بگیرید. توجه کنید که چون جواب یکتا نیست می‌توان راس دل‌خواه z را ثابت در نظر گرفت و به دنبال جواب یکتای u گشت که برای آن داریم $u(z) = 0$. در این حالت تابع گرین $G^z : V \times V \to \mathbb{R}$ جواب معادله زیر است.

$$G_y^z(z) = 0 \quad \text{و به علاوه} \quad \Delta G_y^z = \delta_y - \delta_z \ \ \forall y \in V$$

در این‌صورت جواب یکتاست و داریم $u(x) = \sum_{y \in V} G^z(x,y) h(y)$.
هم‌چنین در این وضع اگر ν_y اندازه تعادل $V - \{y\}$ باشد، تابع گرین به صورت زیر است

$$G^z(x,y) = \frac{1}{n}(\nu_z(x) + \nu_y(z) - \nu_y(x)).$$

و) معادله دیریشله زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} (\Delta u)_{(x)} = 0 & \forall x \in (H_1 \cup H_2)^c \\ u(x) = 1 & \forall x \in H_1 \\ u(x) = 0 & \forall x \in H_2 \end{cases}$$

که $H_1 \neq \emptyset$، $H_2 \neq \emptyset$ و $H_1 \cap H_2$. نشان دهید جواب $u(x)$ به صورت زیر است.

$$u(x) = \sum_{x \in H_1} \frac{\nu^{H_1 \cup H_2 \cup \{x\}} - \nu^{H_1 \cup H_2}}{\nu^{H_1 \cup H_2 \cup \{x\}}(x)}$$

ز) در چارچوب شبکه‌های الکتریکی مقاومت معادل بین دو راس x و y با نماد r_{xy} به صورت $r_{xy} := u(x) - u(y)$ تعریف می‌شود که u هر جواب معادله $\Delta u = \delta_x - \delta_y$ است.

- نشان دهید که $r_{xy} = r_{yx}$ و $r_{xy} = G^y(x, x)$ و $r_{xy} = \frac{1}{n}(\nu_x(y) + \nu_y(x))$.
- هم‌چنین نشان دهید احتمال فرار که به صورت احتمال قدم زدن تصادفی متناظر با شروع از x و برخورد به y قبل از برگشتن به x است برابر است با،

$$P_{scp} = \frac{n}{deg(x)(\nu_x(y) + \nu_y(x))}.$$

- قضیه فاستر را ($\sum_{xy \in E} r_{xy} = n - 1$) ثابت کنید.
- سعی کنید جواب یک معادله دیریشله کلی را بر حسب قدم زدن تصادفی متناظر بنویسید.

ح) توجه کنید تمرین‌های این سری برای گراف‌های ساده، یا به طور معادل برای عمل‌گرهای خودالحاق و یا به طور مشابه برای زنجیره‌های مارکوف برگشت پذیر بیان شد.
با این وجود نظریه زنجیره‌های مارکوف غیر برگشت‌پذیر بسیار مطالعه شده است. تلاش کنید تعمیمی از تمرین‌های گفته شده را برای زنجیره‌های مارکوف غیر برگشت‌پذیر بدست آورید.