دانشکده علوم ریاضی

تمرین سری ۴ آبان ۹۸

بهینه‌سازی هندسی گسسته

(مباحثی در نظریه محاسبه، ۸۳۸-۲۲)

۱. گراف ساده G را در نظر بگیرید که به هر یال e آن عدد حقیقی مثبت $\varphi(e)$ را نسبت داده‌ایم. توجه کنید که $\varphi(e)$ به عنوان تابعی حقیقی روی $V \times V$ یک تابع متقارن است. تعریف کنید $deg(x) = \sum_{x=e^-} \varphi(e)$ و فرض کنید $\sum_x deg(x) = 1$. قدم زدن تصادفی با ماتریس انتقال P را به صورت $P(x,y) = \frac{\varphi(xy)}{deg(x)}$ تعریف کنید.

- نشان دهید که بردار ایستای π به صورت $\pi(v) := deg(v)$ وجود دارد و داریم،

$$\pi(v)P(v,u) = \pi(u)P(u,v) = \varphi(uv).$$

- حالت ترکیبیاتی که در آن همه وزن‌ها برابر ۱ است را نرمال کنید و نشان دهید که قدم زدن تصادفی فوق همان زنجیر مارکوف طبیعی گراف G است که در آن $\omega(v) := deg(v)$ تعریف شده است.
  در ادامه فرض کنید G همبند است و زنجیر مارکوف طبیعی با $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ نمایش داده می‌شود. تعریف می‌کنیم،

$$T_x := \min\{t \geq 0 | X_t = x\},$$

$$T_x^+ := \min\{t \geq 1 | X_t = x\},$$

$$\forall A \subseteq V \quad T_A := \min\{t \geq 0 | X_t \in A\}.$$

هم‌چنین از این پس اندیس راسی برای یک مفهوم مثل احتمال یا میانگین به معنی شروع از توزیع اولیه‌ای است که احتمال در راس مربوطه برابر یک است. ثابت کنید:

- $\mathbb{E}_x T_x^+ = \frac{1}{\pi(x)}$ و $\mathbb{E}_x($تعداد ملاقات‌های راس y قبل از زمان $T_x^+) = \frac{\pi(y)}{\pi(x)}$

- اگر $x \neq y$ آن‌گاه،

$$\mathbb{E}_y(T_x \text{ قبل از زمان } y \text{ تعداد ملاقات‌های راس}) = \pi(y)(\mathbb{E}_y T_x + \mathbb{E}_x T_y).$$

هم‌چنین ثابت کنید

$$\mathbb{P}_x(T_y < T_x^+) = \frac{۱}{\pi(x)(\mathbb{E}_y T_x + \mathbb{E}_x T_y)}$$

- نشان دهید $\sum_{y \in V} \pi(y)\mathbb{E}_x T_y$ مستقل از x است! (این مقدار را بر حسب مقادیر ویژه حساب کنید.)
- مدل فوق را برای گراف ساده G و وزن‌های $\varphi(e)$ در نظر بگیرید و راس x و زیرمجموعه $x \notin A \subset V$ را ثابت فرض کنید. اگر بدانیم تابع ولتاژ g در شرایط مرزی

$$\forall y \in A \;\; g(y) = ۰, \;\; g(x) = ۱$$

صدق می‌کند، نشان دهید که تابع ولتاژ g روی هر راس u به صورت زیر خواهد بود،

$$g(u) = \mathbb{P}_u(T_x < T_A).$$

و نشان دهید که تابع فوق جواب مسئله بهینه‌سازی انرژی زیر است.

$$\pi(x)\mathbb{P}_x(T_A < T_x^+) = \inf\{\mathcal{E}(g) | ۰ \leq g \leq ۱, \; g(x) = ۱, \;\; \forall y \in A \; g(y) = ۰\}$$

- نشان دهید $g(u) = \mathbb{P}_u(T_x < T_y)$ جواب مسئله بهینه‌سازی انرژی زیر است،

$$\mathbb{E}_y T_x + \mathbb{E}_x T_y = \sup\{\frac{۱}{\mathcal{E}(g)} | ۰ \leq g \leq ۱, \; g(x) = ۱, \; g(y) = ۰\}.$$

- مسئله بهینه‌سازی انرژی زیر را در نظر بگیرید:

$$\sup\{\Big(\frac{\mathcal{E}(g)}{||g||_۲^۲}\Big)^{-۱} | \; g \geq ۰, \; g = ۰ \text{ on } A \subseteq V\}.$$

جواب این مسئله را به صورت یک مسئله مقدار ویژه به دست آورید و آن‌را به صورت یک زمان احتمالاتی مربوط به قدم زدن تصادفی طبیعی بیان کنید. (راه‌نمایی: ماتریس P را به A^c تحدید کنید و از قضیه پرون‌ـ فروبنیوس و نمایش مسئله مقدار ویژه دیریشله استفاده کنید)