دانشکده علوم ریاضی

تمرین سری ۳ مهر ۹۸

بهینه‌سازی هندسی گسسته

(مباحثی در نظریه محاسبه، ۸۳۸-۲۲)

۱. گراف $G = (V, E, \omega, \varphi, p)$ را در نظر بگیرید که در آن تابع پتانسیل p نامنفی است. عمل‌گر شرودینگر گسسته $L : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(V)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$Lf_{(x)} := \frac{1}{\omega(x)}\Big(p(x)f(x) + \sum_y (f(x) - f(y))\varphi(xy)\Big)$$

نشان دهید که ماتریس L در پایه استاندارد به صورت زیر است.

$$L(x,y) = \begin{cases} \frac{-\varphi(xy)}{\omega(x)} & x \sim y \\ \frac{p(x)+deg(x)}{\omega(x)} & x = y \qquad deg(x) := \sum_y \varphi(xy) \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

- در این سناریو به حالت مهم $\forall x \ \ \omega(x) = \deg(x)$ توجه کنید!
- نشان دهید L نسبت به $\langle .,. \rangle_\omega$ خود الحاق است.
- نشان دهید

$$\begin{aligned} \langle Lf, f \rangle_\omega &= \Big(\sum_{xy} (f(x) - f(y))^2 \varphi(xy)\Big) + \Big(\sum_x p(x) f(x)^2\Big) \\ &= ||\nabla f||^2_{2,\varphi} + ||f||^2_{2,p} \end{aligned}$$

و نتیجه بگیرید که چون p نامنفی است، L مثبت نیمه معین است.

- برعکس فرض کنید که L یک ماتریس $n \times n$ باشد که،
  - بردار ω با درایه‌های مثبت وجود دارد که L نسبت به ω خودالحاق است.
  - درایه‌های خارج از قطر L همگی نامثبت هستند.

نشان دهید که می‌توان گراف $G = (V, E, \varphi, \omega, p)$ را ساخت که L عمل‌گر شرودینگر گسسته آن باشد.

۲. زیرمجموعه A از راس‌های گراف $G(V, E)$ را در نظر بگیرید. آن‌گاه مرزهای یالی و راسی A به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\partial A := \{e = xy \in E : x \in A, y \in V \setminus A\}$$
$$\delta A := \{x \in V \setminus A : \exists y \in A \;\; x \sim y\}$$

اگر برای یک زیرمجموعه A داشته باشیم $V = A \cup \delta A$، آن‌گاه G را یک گراف مرزدار با مرز A می‌نامیم. مسئله مقدار ویژه دیریشله برای چنین گرافی به صورت زیر است.

$$\begin{cases} Lf_{(x)} = \lambda f_{(x)} & \forall x \in A \\ f(x) = 0 & \forall x \in \delta A \end{cases}$$

- عمل‌گر $L[A]$ را تحدید عمل‌گر شرودینگر L به A در نظر بگیرید (ماتریس A را به سطر و ستون‌های A محدود کنید). در این‌صورت مسئله مقدار ویژه دیریشله برای یک $\lambda \in \mathbb{R}$ و یک تابع ناصفر f جواب دارد اگر و تنهااگر λ مقدار ویژه $L[A]$ باشد. هم‌چنین تابع ویژه متناظر λ از تحدید تابع f به A به دست می‌آید.
- نشان دهید مقدار ویژه (اول) دیریشله به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\lambda_1(A) = \min_{f \neq 0, f|_{V \setminus A} = 0} \left\{ \frac{\varepsilon(f)}{||f||^2_{2,\varphi}} \right\}$$

- در این سناریو از قضیه پرون– فروبنیوس چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟
- تعبیر احتمالاتی از $\lambda_1(A)$ ارائه دهید و نتیجه بگیرید که در حالت کلی مقادیر ویژه دارای بعد [1] عکس زمان هستند.
- اگر $A \subseteq B$ باشد در مورد رابطه $\lambda_1(A)$ و $\lambda_1(B)$ چه می‌توان گفت؟
- نشان دهید که مدل گراف‌های وزن‌دار با پتانسیل مدل گراف‌های مرزدار را شامل می‌شود!

[1] dimension