



بهینه‌سازی هندسی گسسته

(مباحثی در نظریه محاسبه، ۸۳۸-۲۲)

۱. گراف جهت‌دار G را در نظر بگیرید. اگر G اویلری باشد (یعنی $d^- = d^+$) در مورد توزیع ایستای زنجیرهای مارکوف طبیعی و ترکیبیاتی چه می‌توان گفت؟ اگر G همبند نباشد آیا توزیع ایستای هیچ‌جا صفر وجود دارد؟ چرا؟

۲. اهمیت حالت $\omega(u) = \sum_v \varphi(uv)$ در چیست؟

۳. زنجیر زیر از نگاشت‌ها را در نظر بگیرید.

$$0 \xrightarrow{0} \mathcal{F}(E) \xrightarrow{\partial_1 = \nabla^*} \mathcal{F}(V) \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{R} \xrightarrow{0} 0$$

که در آن $\partial_0(f) := \sum_v f(v)$

آ- هسته و برد نگاشت‌های ∂_1 و ∂_0 را مشخص کنید.

ب- $H_1 := \frac{\ker(\nabla^*)}{\text{Reng}(0)}$ را توصیف کنید.

ج- فضای برداری $H_0 := \frac{\ker(\partial_0)}{\text{Reng}(\nabla^*)}$ را مشخص و توصیف کنید.

د- با این اطلاعات $\mathcal{F}(V)$ و $\mathcal{F}(E)$ را به صورت جمع مستقیم توصیف کنید.

ه- زنجیر دوگان زیر را به صورت مناسب تعریف کنید و تعاریف مشابهی برای H^0 و H^1 بیان و به سوالات مشابهی از بخش‌های الف تا د پاسخ دهید.

$$0 \xleftarrow{0} \mathcal{F}(E) \xleftarrow{\partial_1 = \nabla} \mathcal{F}(V) \xleftarrow{\partial^0} \mathbb{R} \xleftarrow{0} 0$$

و- این تمرین را دوباره با جایگزین کردن میدان دو عضوی \mathbb{Z}_2 به جای \mathbb{R} حل کنید.

۴. تساوی $\langle \Delta f, f \rangle_\omega = \langle \nabla^* \nabla f, f \rangle = \|\nabla f\|_{\varphi}^2$ با کدام یک از مفاهیم زیر در حسابان ارتباط معنایی دارد؟

- روش انتگرال جزیه جز
- قضیه گرین
- قضیه استوکس

از این تساوی نتیجه بگیرید،

$$\langle \Delta f, f \rangle_\omega = \sum_{u,v} |f(u) - f(v)|^2 \varphi(uv).$$

و با شهود شبکه‌های الکتریکی $\varphi(uv)$ را به صورت رسانایی توجیه کنید. در این چارچوب نشان دهید،

$$\Delta f(u) = \frac{1}{\omega(u)} \sum_v (f(u) - f(v)) \varphi(uv).$$

این عمل گر را در وضعیت زنجیر مارکوف طبیعی به عنوان متوسط‌گیر توجیه کنید. هم‌چنین اگر f یک تابع ویژه Δ با مقدار ویژه متناظر $\lambda \geq 0$ باشد و u یک می‌نیمم موضعی f باشد توجیه کنید که،

$$\lambda f(u) = \Delta f(u) = \frac{1}{\omega(u)} \sum_v (f(u) - f(v)) \varphi(uv) < 0.$$

قضیه‌ی مشابهی برای ماکزیمم موضعی ثابت کنید.

۵. تعریف زنجیر مارکوف برگشت‌پذیر^۱ را دقیق مطالعه کنید و این تعریف را با مفهوم خودالحاق بودن عمل گر انتقال P مقایسه کنید. توجیه نام ”برگشت‌پذیر“ بودن چیست؟

^۱reversible