



بهینه‌سازی هندسی گسسته
(مباحثی در نظریه محاسبه، ۸۳۸-۲۲)

۱. یک شبکه الکتریکی را با یک گراف مدل کنید. برای سادگی فرض کنید مقاومت هر سیم یک اهم باشد. قوانین بقای جریان و ولتاژ گراف را به صورت معادلات خطی بنویسید. اگر ولتاژ f روی راس‌ها مشخص شده باشد معادله‌ای که جریان هر سیم را مشخص می‌کند به دست آورید و نشان دهید که این معادله به جهت ربط ندارد. این موضوع را توجیه کنید.

۲. یک زنجیر مارکوف را با ماتریس انتقال P روی یک مجموعه n -عضوی در نظر بگیرید. توزیع ایستای هیچ‌جا صفر π را که در معادله $\pi P = \pi$ صدق می‌کند در نظر بگیرید و تعریف کنید:

$$A = \frac{1}{2}(P + P^*), \quad \tilde{\Delta} = I - A, \quad \Delta = I - P$$

که در آن الحاق P یعنی P^* به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\forall x, y \quad \langle Px, y \rangle_\pi = \langle x, P^*y \rangle_\pi.$$

نشان دهید که داریم،

$$\pi(i)P(i, j) = \pi(j)P^*(j, i) \bullet$$

$$\langle \tilde{\Delta}x, x \rangle_\pi = \langle \Delta x, x \rangle_\pi \bullet$$

وزن‌های راسی و یالی را به صورت زیر تعریف کنید،

$$\omega(u) := \pi(u), \quad \varphi(uv) := \pi(u)P(u, v)$$

در این مدل عمل‌گرهای ∇ و ∇^* و Δ را محاسبه کنید. مشخص کنید که وزن φ در این مدل بیان‌گر شباهت است یا فاصله؟ چرا؟

نشان دهید در این مدل $\omega(u) = \sum_v \varphi(uv)$ بررسی کنید که آیا در این مدل تابع φ یک شار را روی یال‌ها مشخص می‌کند؟ چرا؟

۳. گراف جهت‌دار G را (احتمالا با طوقه) در نظر بگیرید. فرض کنید d^+ و d^- به ترتیب توابع درجه خروجی و درجه ورودی باشد. ماتریس P را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$P(u, v) = \frac{1}{d^+(u)}.$$

و زنجیر مارکوف با این ماتریس انتقال را زنجیر مارکوف طبیعی برای گراف G می‌نامیم. هم‌چنین ماتریس \tilde{P} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

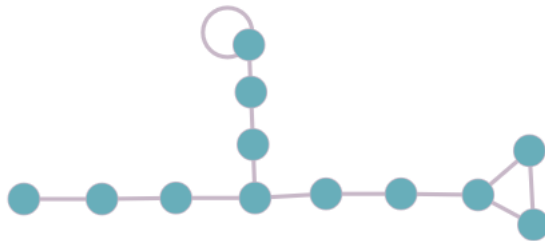
$$\tilde{P}(u, v) = \frac{1}{d_{\max}^+}.$$

که در آن d_{\max}^+ ماکزیمم درجه خروجی است. عمل‌گرهای لاپلاسیان را برای P و \tilde{P} محاسبه کنید و توجیه کنید که چرا به زنجیر مارکوف معادل \tilde{P} زنجیر مارکوف ترکیبیاتی مربوط به G گفته می‌شود. این زنجیرهای مارکوف چه اطلاعاتی در مورد گراف G ارائه می‌دهند؟ (با مثال بیان کنید)

۴. قضیه کورانت-فیشر^۱ را به دقت بیان کنید.

۵. قضیه پرون-فروبنیوس^۲ را به دقت بیان کنید.

۶. تمرین‌های ۱ تا ۵ را برای مثال‌های مشخصی که ارائه می‌دهید بیان و پس از محاسبه بحث کنید. به عنوان نمونه می‌توانید گراف زیر را در نظر بگیرید.



^۱Courant-Fischer Theorem

^۲Perron-Frobenius Theorem