تمرین سری ۵ آبان ۹۸

بهینه‌سازی هندسی گسسته

(مباحثی در نظریه محاسبه، ۸۳۸-۲۲)

۱. گراف ساده و همبند G را با وزن‌های یالی $\varphi(e)$ در سناریو تمرین ۴ در نظر بگیرید. در این صورت ماتریس لاپلاسین متناظر با P را به صورت $\Delta = I - P$ در نظر گرفته و توجه کنید که چون Δ خودالحاق و مثبت است داریم،

$$\Delta = \sum_{x \in V} \lambda_x f_x f_x^T$$

که در آن $\{f_x\}_{x\in V}$ یک پایه یکه متعامد از بردارهای ویژه Δ است. مقادیر ویژه Δ را به صورت $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ در نظر بگیرید و توجه کنید که $\Delta\chi_G = 0$. در این حالت ماتریس شبه‌معکوس [1] Δ که با نماد $\Delta^\dagger$ نشان داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\Delta^\dagger := \sum_{i=2}^{n} \lambda_i^{-1} f_i f_i^T.$$

این گراف را به صورت یک شبکه الکتریکی در نظر گرفته و تابع ولتاژ g را طوری در نظر بگیرید که برای دو راس ثابت x و y داریم، $\Delta g = \chi_x - \chi_y$ و جریان ι_g را جریان متناظر با این ولتاژ در نظر بگیرید (که در قوانین ولتاژ و جریان کرشهوف صدق می‌کند) و توجه کنید که داریم، $g = \Delta^\dagger(\chi_x - \chi_y)$ و $\iota_g(uv) = \varphi(uv)(g(u) - g(v))$ و $\nabla^*\iota_g = \chi_x - \chi_y$.
نشان دهید که ι_g جریانی‌ست که تابع انرژی نرمال شده را می‌نیمم می‌کند. در این ساختار مقاومت معادل بین x و y را برابر با مقدار $g(x) - g(y)$ تعریف می‌کنیم و با $R_{\text{eff}}(x,y)$ نشان می‌دهیم.

[1] Moore-Penrose

- نشان دهید که $R_{\text{eff}}(x,y)=\mathcal{E}(\iota_g)$ و از تمرین ۴ یک تعبیر احتمالاتی برای آن ارائه دهید.
- نشان دهید که $R_{\text{eff}}(x,y)=\langle(\chi_x-\chi_y),\Delta^{\dagger}(\chi_x-\chi_y)\rangle$.
- نشان دهید که مقاومت معادل، یک متر روی فضای رئوس V تعریف می‌کند و این متر را با متر کوتاه‌ترین مسیر مقایسه کنید.